CMOS インバータの波形解析

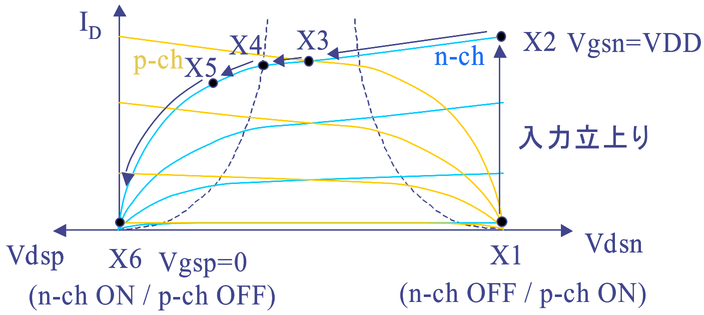
4．4．1　立下り時間の解析

Vi：入力電圧

Vo：出力電圧

C_L：負荷容量

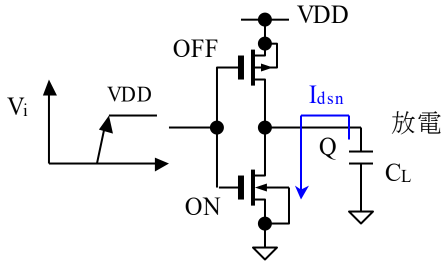
VDD：電源電圧



１．X1→X2（カットオフ→飽和領域）

入力 Vi の変化により瞬間的に移動する。

この途中で貫通電流が一瞬流れる。



２．X2→X3→X4（n-ch MOSFET 飽和領域）

$$\begin{cases} I_{dsn} = \dfrac{\beta_n}{2}(VDD - V_{tn0})^2 \\ Q_C = C_L \cdot V_o \\ I_{dsn} = -\dfrac{dQ_C}{dt} \\ I_{dsn} = -\dfrac{d}{dt}(C_L V_o) = -C_L \dfrac{dV_o}{dt} \end{cases}$$

以上の関係式より、この回路方程式（連続の方程式）は、

$$C_L \frac{dV_o}{dt} + I_{dsn} = C_L \frac{dV_o}{dt} + \frac{\beta_n}{2}(VDD - V_{tn0})^2 = 0$$

X2 の状態になった瞬間を、t=0, V_o = VDD とし、t = t’, V_o = V_o’ まで積分すると、

$$C_L [V_o]_{VDD}^{V_o'} + \frac{\beta_n}{2}(VDD - V_{tn0})^2 t' = 0$$

$$C_L (V_o' - VDD) + \frac{\beta_n}{2}(VDD - V_{tn0})^2 t' = 0$$

$$V_o' = -\frac{\beta_n}{2C_L}(VDD - V_{tn0})^2 t' + VDD$$

従って、X4 の状態までは、時間 t’に対して直線的に出力電圧が変化する。出力電圧 V_o’ = 0.9VDD から X4 に達するまでの t_{f1} は、

$$t' = \frac{2C_L (VDD - V_o')}{\beta_n (VDD - V_{tn0})^2}$$

$$\begin{cases} t' = t2 \text{ のとき、} V_o' = 0.9VDD \\ t' = t4 \text{ のとき、} V_o' = VDD - V_{tn0} \end{cases}$$

とすると、

$$t_{f1} = t_4 - t_2 = \frac{2C_L (VDD - VDD + V_{tn0}) - 2C_L (VDD - 0.9VDD)}{\beta_n (VDD - V_{tn0})^2} = \frac{2C_L (V_{tn0} - 0.1VDD)}{\beta_n (VDD - V_{tn0})^2} \qquad (4.12)$$

３．X4→X5→X6（n-ch MOSFET 線形領域）

$$\begin{cases} I_{dsn} = \beta_n\{(VDD - V_{tn0})\cdot V_o - \frac{1}{2}V_o{}^2\} \\ C_L \frac{dV_o}{dt} + I_{dsn} = 0 \end{cases}$$

以上の関係式より、この回路方程式（連続の方程式）は、

$$C_L \frac{dV_o}{dt} + \beta_n\{(VDD - V_{tn0})\cdot V_o - \frac{1}{2}V_o{}^2\} = 0$$

この方程式は、Bernoulli 型方程式であり、以下の変数変換により解が得られる。

$$\frac{1}{V_o{}^2}\frac{dV_o}{dt} + \frac{\beta_n}{C_L}(VDD - V_{tn0})\cdot\frac{1}{V_o} - \frac{\beta_n}{2C_L} = 0$$

$u \equiv \frac{1}{V_o}$　と変数変換すると、

$\frac{dV_o}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}$　より、

$$-\frac{du}{dt} + \frac{\beta_n}{C_L}(VDD - V_{tn0})\cdot u - \frac{\beta_n}{2C_L} = 0$$

$$\frac{du}{dt} - \frac{\beta_n}{C_L}(VDD - V_{tn0})\cdot\{u - \frac{1}{2\cdot(VDD - V_{tn0})}\} = 0$$

さらに、

$y \equiv u - \frac{1}{2\cdot(VDD - V_{tn0})}$　と変数変換すると、

$$\frac{dy}{dt} - \frac{\beta_n}{C_L}(VDD - V_{tn0})\cdot y = 0$$

$t = 0$　のときに、$V_o = VDD - V_{tn0}$　（X4の点）、

$u(t=0) = \frac{1}{V_o(t=0)} = \frac{1}{VDD - V_{tn0}}$　（初期条件）

$$u = \frac{1}{2\cdot(VDD - V_{tn0})}[\exp\{\frac{\beta_n}{C_L}(VDD - V_{tn0})\cdot t\} + 1]$$

$$V_o = \frac{1}{u} = \frac{2\cdot(VDD - V_{tn0})}{\exp\{\frac{\beta_n}{C_L}(VDD - V_{tn0})\cdot t\} + 1}$$

従って、X6 の状態まで移動する間は、時間 t に対してほぼ指数関数的に出力電圧が変化する。出力電圧が X4 から $V_o = 0.1VDD$ に達するまでの t_{f2} は、

$$t = \frac{C_L}{\beta_n(VDD - V_{tn0})}\ln\frac{2\cdot(VDD - V_{tn0}) - V_o}{V_o}$$

$$\begin{cases} t = t4 \text{ のとき、} V_o = VDD\text{-}V_{tn0} \\ t = t6 \text{ のとき、} V_o' = 0.1VDD \end{cases}$$

とすると、

$$t_{f2} = t_6 - t_4 = \frac{C_L}{\beta_n (VDD - V_{tn0})} \{\ln \frac{2 \cdot (VDD - V_{tn0}) - 0.1VDD}{0.1VDD} - \ln \frac{2 \cdot (VDD - V_{tn0}) - (VDD - V_{tn0})}{VDD - V_{tn0}}\}$$

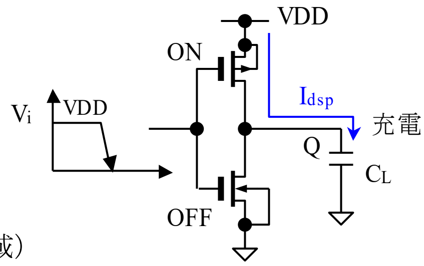
$$= \frac{C_L}{\beta_n (VDD - V_{tn0})} \ln \frac{1.9 \cdot VDD - 2 \cdot V_{tn0}}{0.1 \cdot VDD} \quad (4.13)$$

0.9VDD → 0.1VDD に立下がる時間 t_f は、

$$t_f = t_{f1} - t_{f2} = \frac{2 \cdot C_L}{\beta_n (VDD - V_{tn0})} \{\frac{V_{tn0} - 0.1VDD}{VDD - V_{tn0}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1.9 \cdot VDD - 2 \cdot V_{tn0}}{0.1 \cdot VDD}\} \quad (4.14)$$

4．4．2　立ち上がり時間の解析

立上がり時間は、p-ch MOSFET を通して C_Lが充電されることにより行われるので、n-ch → p-ch の置換えを行えば、同様にして波形の解析式が得られる。閾値 $V_{tp0} < 0$ であることに注意。



$$t_{r1} = \frac{2 \cdot C_L (-V_{tp0} - 0.1VDD)}{\beta_p (VDD + V_{tp0})}$$ （p-ch MOSFET 飽和領域）

$$t_{r2} = \frac{C_L}{\beta_p (VDD + V_{tp0})} \ln \frac{1.9 \cdot VDD + 2 \cdot V_{tp0}}{0.1 \cdot VDD}$$ （p-ch MOSFET 線形領域）

$$t_r = t_{r1} - t_{r2} = \frac{2 \cdot C_L}{\beta_p (VDD + V_{tp0})} \{\frac{-V_{tp0} - 0.1VDD}{VDD + V_{tp0}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1.9 \cdot VDD + 2 \cdot V_{tp0}}{0.1 \cdot VDD}\} \quad (4.18)$$