基本事項（２）

伝達関数とボーデ線図

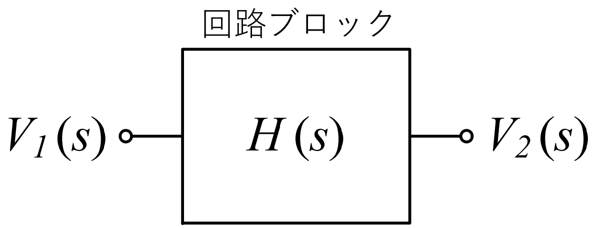
伝達関数

伝達関数 $H(s)$

ラプラス変換した回路方程式から求められる

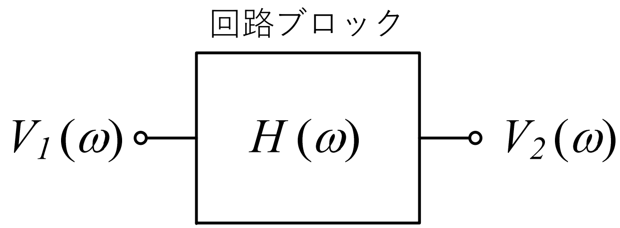
周波数領域伝達関数 $H(\omega)$
または周波数特性※

複素ベクトル表記の回路方程式から求められる



$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$$

$s = j\omega\ (\sigma = 0)$として求めてもよい
（逆方向はできない）

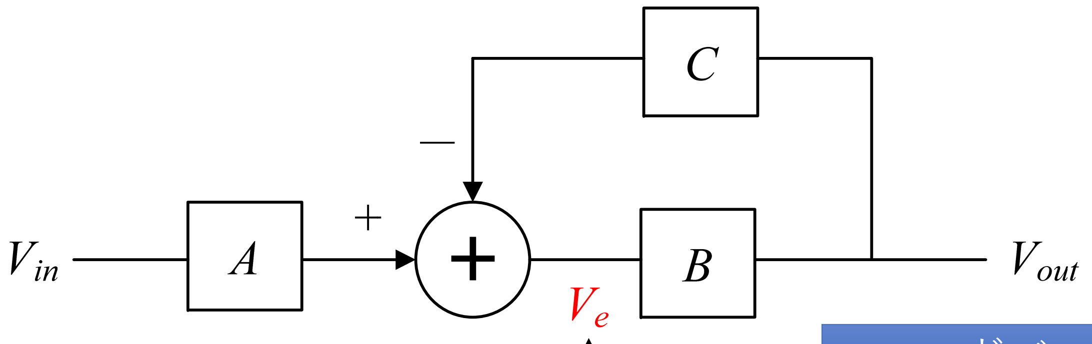


$$H(\omega) = \frac{V_2(\omega)}{V_1(\omega)} \quad \text{または} \quad \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}$$

[NOTE] 回路ブロックの複雑な信号処理を、伝達関数（入力と出力の比）で表す。電子回路では、周波数領域伝達関数も伝達関数と呼ぶことが多い。増幅回路の周波数領域伝達関数は、通常、利得(Gain)または利得の周波数特性と呼ばれる。

※ 厳密には、周波数fの関数が周波数特性と呼ばれるが、角周波数ωを変数として表してもよい。

Q1. 伝達関数$H = V_{out}/V_{in}$を求めよ。



フィードバックがある場合は、加算器の後ろに変数を置いて式を立てる。

$$\begin{cases} V_e = AV_{in} - CV_{out} \\ V_{out} = BV_e \end{cases}$$

$$V_{out} = ABV_{in} - BCV_{out}$$

$$(1 + BC)V_{out} = ABV_{in}$$

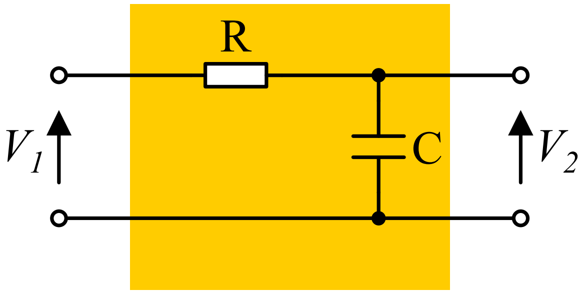
$$H = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{AB}{1 + BC}$$

解答

[NOTE] 複雑な周波数伝達関数は、単純な伝達関数（微分、積分、定数倍など）を部品としたブロックダイアグラムで表される。

伝達関数の周波数特性

[NOTE] コーナ角周波数は、|実部|=|虚部|とすると求められる。



$$H(\omega)=\frac{V_2}{V_1}=\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{1}{1+j\omega CR}=\frac{1}{1+j\omega/\omega_p}\quad(\omega_p=1/CR)$$

1. コーナ角周波数を求める（分子はω_z, 分母はω_pと表記）
2. コーナおよびコーナ前後の伝達関数を調べる

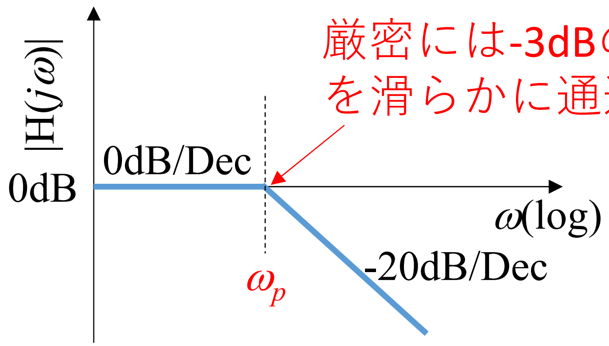
角周波数	周波数伝達関数	振幅 $\lvert H(j\omega)\rvert$	位相 $\angle H(j\omega)$
$\omega<\omega_p$	$H(\omega)\cong 1$ （虚部無視）	$1=0\mathrm{dB}$	$0\mathrm{rad}$
$\omega=\omega_p$ (Corner)	$H(\omega)=\frac{1}{1+j}=\frac{1-j}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\cong -3\mathrm{dB}$	$-\frac{\pi}{4}\mathrm{rad}$
$\omega>\omega_p$	$H(\omega)\cong -j\frac{\omega_p}{\omega}$ （実部無視）	$\frac{\omega_p}{\omega}=-20\log\omega+20\log\omega_p(\mathrm{dB})$	$-\frac{\pi}{2}\mathrm{rad}$

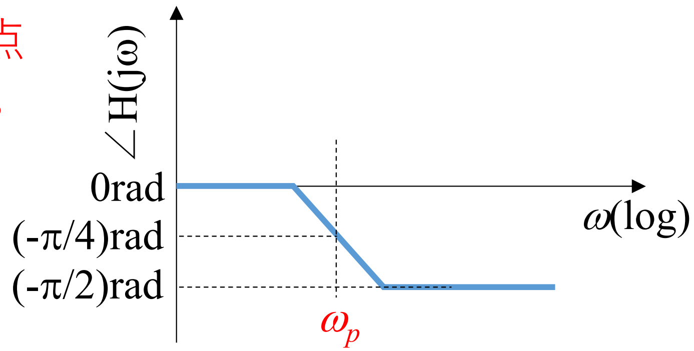
[NOTE] 周波数特性を調べる場合は、分子と分母のωの関数を、$(1+j\omega/\omega_{z/p})$で括るように整理すると見通しがよくなる。 コーナω_z, ω_pは、振幅特性の傾きが変化する角周波数を表している。

ボーデ線図の概略（＝折れ線近似）

- 振幅特性
  - 縦軸：絶対値のデシベル表記、横軸：角周波数の対数目盛表記
- 位相特性
  - 縦軸：位相角のradまたはdeg表記、横軸：角周波数の対数目盛表記

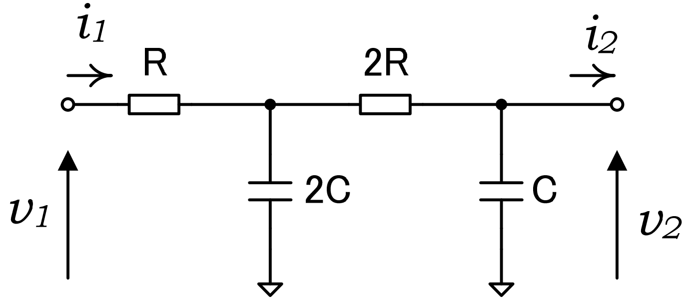
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_p}$$ （前スライドの回路例では $\omega_p = \frac{1}{CR}$ ）





[NOTE] コーナの角周波数ω_pと各部の振幅特性の傾きを記入すること。

Q1. 周波数伝達関数のボーデ線図の概略を示せ。



$$\begin{bmatrix}1 & R\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\j\omega 2C & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2R\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\j\omega C & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+j\omega 2CR & R\\j\omega 2C & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+j\omega 2CR & 2R\\j\omega C & 1\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}(1+j\omega 2CR)^2+j\omega CR & 2R(1+j\omega 2CR)+R\\j\omega 2C(1+j\omega 2CR)+j\omega C & 1+j\omega 4CR\end{bmatrix}$$

行列を使った計算方法は、「２端子対パラメータ」の項を参照

$$A=1+j\omega 5CR+(j\omega 2CR)^2=(1+j\omega 4CR)(1+j\omega CR)$$

$$\begin{cases}H(\omega)=\dfrac{1}{A}=\dfrac{1}{(1+j\omega 4CR)(1+j\omega CR)}=\dfrac{1}{(1+j\omega/\omega_{p1})(1+j\omega/\omega_{p2})}\\[2ex]\omega_{p1}=\dfrac{1}{4CR}\quad \omega_{p2}=\dfrac{1}{CR}\end{cases}$$

Q1の作図

周波数伝達関数

$$H(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_{p1})(1 + j\omega/\omega_{p2})} = \frac{(1 - j\omega/\omega_{p1})(1 - j\omega/\omega_{p2})}{|1 + j\omega/\omega_{p1}|^2 |1 + j\omega/\omega_{p2}|^2}$$

振幅特性

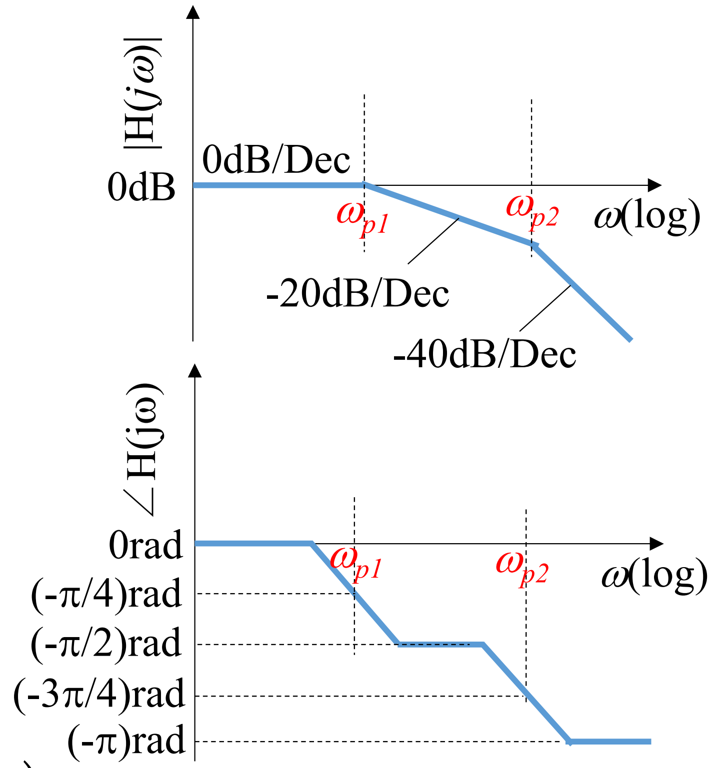
（ω/ω_p= 1 の前後で傾きが変わる）

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right|\left|1 + j\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)^2}}$$

位相特性

（実部 = 1 なので、下記のような計算が可能）

$$\angle H(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega}{\omega_{p1}}\right) + \arctan\left(\frac{-\omega}{\omega_{p2}}\right) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right)$$



$$\omega_{p1} = \frac{1}{4CR} \quad \omega_{p2} = \frac{1}{CR}$$

[NOTE] 振幅と位相がすぐに計算できるようにしておくこと。

2次の伝達関数

分母のラプラス変数sが2次以上の伝達関数を用いると、LPF(Low Pass Filter)、HPF(High Pass Filter)の他にBPF(Band Pass Filter)、BRF(Band Reject Filter)なども作れるため、試験では2次の伝達関数がよく出題される。

2次LPFの伝達関数

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

分子が0次

2次BPFの伝達関数

$$H(s) = \frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{j\omega\frac{\omega_0}{Q}}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

分子が1次

2次HPFの伝達関数

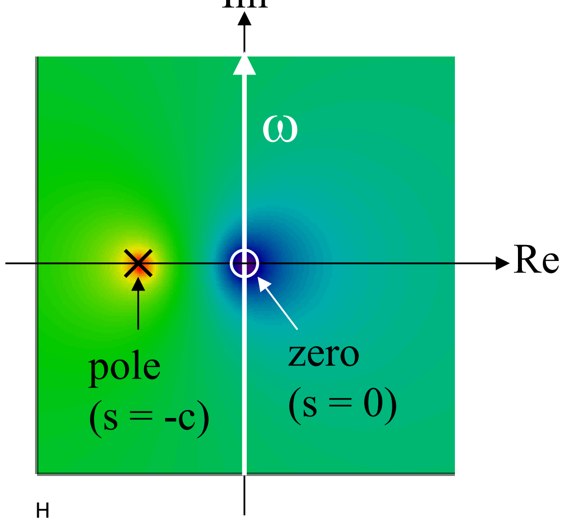
$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{-\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

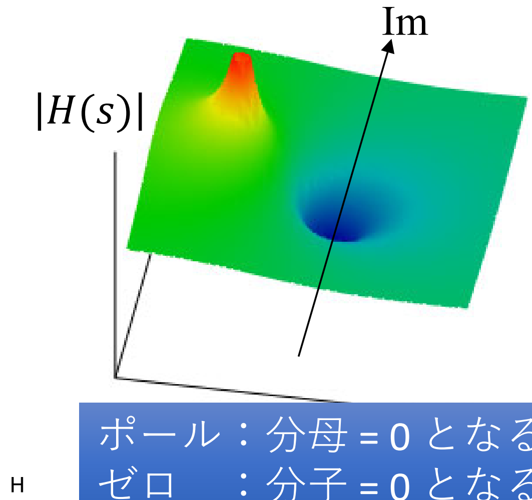
分子が2次

[NOTE] H(ω)を無理に$j\omega$の1次関数に因数分解しようとするとややこしくなるので、上記のH(ω)の一般形を覚えておこう。分母の実部が$-\omega^2$を含み、虚部がωを含む。

ラプラス変数sと周波数特性

$s = \sigma + j\omega \qquad H(s) = \dfrac{a \cdot s}{s + c}$ の例





ポール：分母 = 0 となるsの値（×で表す）
ゼロ　：分子 = 0 となるsの値（〇で表す）

[NOTE] s平面の虚数軸が周波数軸となる。分子または分母の関数が高次の伝達関数の周波数特性は、s平面上で考えると理解しやすいが、詳しくは信号処理または制御理論を学ぶ必要があるので、とりあえず、ポールとゼロの性質だけ把握しておこう。

ポールとゼロ

コーナ周波数が発生する原因は、 s平面上にポール(H = ∞)とゼロ(H = 0)が存在するためである。

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

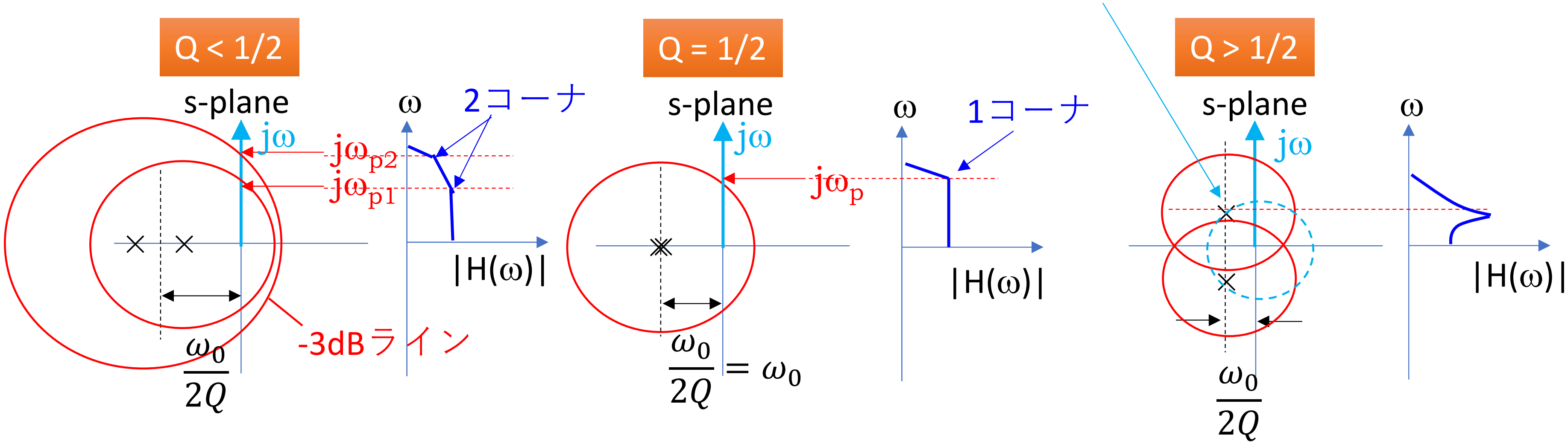
LPFの伝達関数の例

[NOTE] 定数項をω_0^2, 1次の係数をω_0/Qと置くのは、LCR回路に由来する（Q2参照）。

ポール $s_p = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$ ← 2実数、1実数（重解）、2複素数によって特性が異なる。

ゼロ この例では発生しない

$|s_p| = \omega_0$ より、ポールが半径ω_0の円上に発生



BPFとHPF

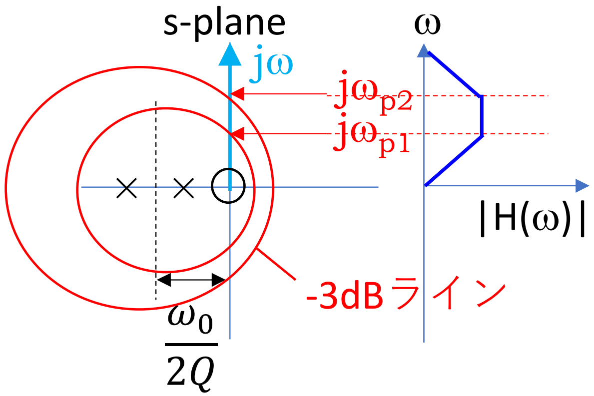
BPFの伝達関数の例

$$H(s)=\frac{\frac{\omega_0}{Q}s}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$

ポール $s_p=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$

ゼロ $s_z=0$

Q < 1/2



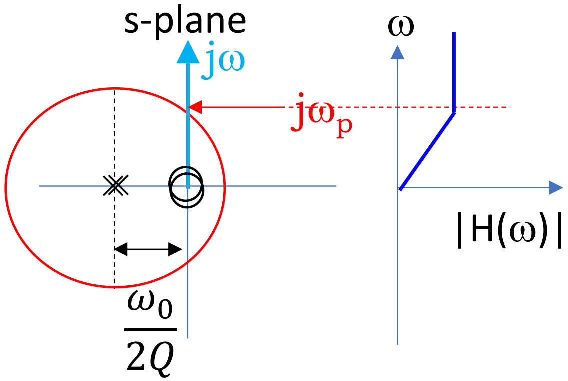
HPFの伝達関数の例

$$H(s)=\frac{s^2}{s^2+\frac{\omega_0}{Q}s+\omega_0^2}$$

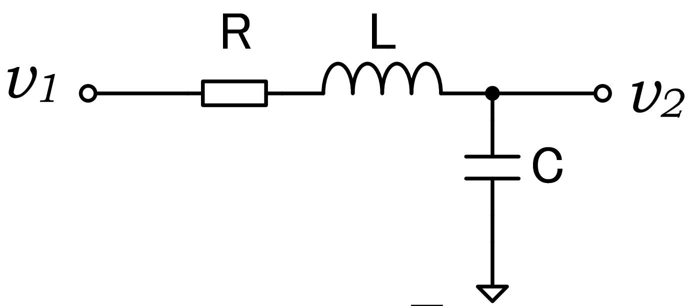
ポール $s_p=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$

ゼロ $s_z=0$ （2重解）

Q = 1/2



Q2. $R^2C^2 = 4LC$のとき、周波数伝達関数の振幅特性のボード線図を示せ。



$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{(1-\omega^2 LC) + j\omega CR} = \frac{\frac{1}{LC}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + j\omega\frac{R}{L}}$$

共振回路の共振周波数ω_0とQ値を用いて書き直すと、

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{LC}}{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right) + j\omega\frac{R}{L}} = \frac{\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

$$R^2C^2 = 4LC \Rightarrow Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2}$$

LPFの周波数伝達関数の形になることが分かる。また、$Q = 1/2$ より、ポールが2重解（コーナが1個）である。

[NOTE] ここでは、Qを求めて、1/2より大きいかどうかを調べたが、伝達関数の形を忘れたときは、ラプラス変数の伝達関数H(s)のポールを求め、判別式よりポールが実数または複素数になる条件を判断できる。

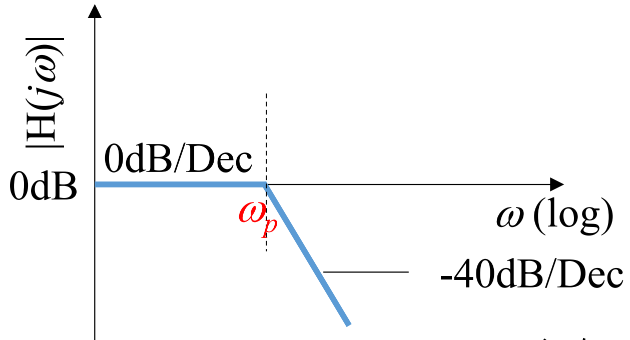
Q2の作図

Q = ½のとき、$H(\omega)=\dfrac{\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+j\omega\dfrac{\omega_0}{Q}}=\dfrac{\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)+j\omega 2\omega_0}=\dfrac{\omega_0^2}{(\omega_0+j\omega)^2}=\dfrac{1}{(1+j\omega/\omega_0)^2}$

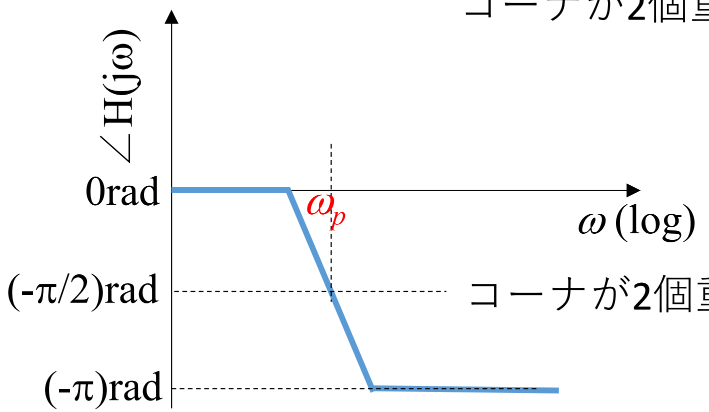
コーナ角周波数を求める。

$R^2C^2=4LC$ より、

$$\omega_p=\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}\text{または}\frac{R}{2L}$$



コーナが2個重なっているため傾きが-40dB/Dec



コーナが2個重なっているため位相変化が-π